Les suites numériques

M1 – Chapitre 1

I. Suites particulières

Suite arithmétique	Suite géométrique	Suite arithmético-géométrique
$U_{n+1} = U_n + r$	$U_{n+1} = qU_n$	$\begin{cases} \boxed{U_{n+1} = aU_n + b} \\ \alpha = a\alpha + b \end{cases}$ $\Rightarrow U_{n+1} - \alpha = a(U_n - \alpha)$ $\underline{V_n = U_n - \alpha} \Rightarrow V_{n+1} = aV_n \Rightarrow V_n = a^n V_0$ donc $\boxed{U_n = a^n(U_0 - \alpha) + \alpha}$ avec $\boxed{\alpha = \frac{b}{1-a}}$
$U_n = U_p + (n-p)r$	$U_n = U_p q^{n-p}$	
$S_n = (n+1)\frac{U_p + U_{p+n}}{2}$	$S_n = U_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$	

Suite récurrente linéaire du 2ème ordre			
$\boldsymbol{\boxed{U_{n+2} = aU_{n+1} + bU_n}}$ $\boldsymbol{q^2 - aq - b = 0}$	$\Delta < 0$ $q = re^{\pm ei\theta}$	$\Delta > 0$ q_1 et q_2 sol.	$\Delta = 0$ q_0 sol.
$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \in \mathbb{R}^2$	$U_n = r^n(\lambda \cos n\theta + \mu \sin n\theta)$	$U_n = \lambda q_1^n + \mu q_2^n$	$U_n = (\lambda n + \mu) q_0^n$
$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \in \mathbb{C}^2$			

II. Suites convergentes, divergentes

1. Suite convergente

Définition	Unicité
U_n converge vers $l \Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0,\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N},\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 \Rightarrow \lvert U_n - l \rvert \leq \varepsilon$	Cette limite est unique

2. Suite bornée

Suite bornée	Théorème
U_n bornée $\Leftrightarrow \exists\,(m, M),\ m \leq U_n \leq M$	U_n converge $\Rightarrow U_n$ bornée

3. Suite extraite

Définition	Théorème
On appelle suite extraite de (U_n) toute suite (V_n) telle que $V_n = U_{\varphi(n)}$	$(U_n) \to l$ $\Rightarrow U_{\varphi(n)} \to l$

4. Suite divergente

Définition	Définitions	
U_n diverge si elle n'a pas de limite finie ou si elle tend vers $\pm\infty$	$U_n \to +\infty \Leftrightarrow$ $\forall\, A > 0,\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N},\ \forall\, n \in \mathbb{N},$ $n \geq n_0 \Rightarrow U_n > A$	$U_n \to -\infty \Leftrightarrow$ $\forall\, A > 0,\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N},\ \forall\, n \in \mathbb{N},$ $n \geq n_0 \Rightarrow U_n < -A$

III. Opérations sur les limites

Somme et produit de limites	Théorème d'encadrement (des gendarmes)
$\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = l\ et\ \lim\limits_{n\to+\infty} V_n = l'$ $\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} U_n + V_n = l + l'$ $\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} U_n V_n = l \cdot l'$	$\exists\, n_0 \in \mathbb{N}, n \geq n_0,$ $U_n \leq V_n \leq W_n\ et\ \lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \lim\limits_{n\to+\infty} W_n = l$ $\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} V_n = l$

IV. Limite de suites monotones

Théorème	**Théorème**
Toute suite croissante à partir d'un certain rang et majorée converge. Si elle n'est pas majorée, elle diverge vers $+\infty$	Toute suite décroissante à partir d'un certain rang et minorée converge. Si elle n'est pas minorée, elle diverge vers $+\infty$

V. Suites adjacentes

Définition	**Théorème**
(U_n) et (V_n) sont adjacentes $\Leftrightarrow (U_n) \nearrow, (V_n) \searrow$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n - V_n = 0$	(U_n) et (V_n) sont adjacentes $\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \lim\limits_{n\to+\infty} V_n = l$